***Лекция 10***

**Сложение вращений твердого тела**

## Теорема о сложении угловых скоростей тела.

Пусть тело Т имеет в данный момент угловую скорость **r**  по отношению к подвижной системе координат x y z, которая, в свою очередь, вращается с угловой скоростью **е** по отношению к условно неподвижной системе координат (Рис.1).

ωr

ωe

X

Y

Z

x

y

z

O1

O

Рис.1

Рассмотрим вектор в теле **а**. Наблюдатель О1 в подвижной системе запишет формулу Эйлера для относительной производной вектора

Наблюдатель О в неподвижной системе запишет формулу Эйлера для абсолютной производной вектора

Как известно, обе производные связаны теоремой

Таким образом,

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Поскольку – произвольный вектор в теле, то отсюда следует теорема о сложении угловых скоростей:

***Обобщение***. Если рассмотреть последовательность N подвижных систем координат, то формулу (1) можно обобщить:

где  **-** угловая скорость системы с номером по отношению к системе с номером , а - угловая скорость тела по отношению к последней системе с номером N.

**Сложение вращений тела вокруг парралельных осей.**

**Пара вращений**

Рассмотрим механизм, состоящий из водила (рогатки), вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью **е** и диска, вращающегося относительно водила с угловой скоростью **r .** Очевидно, что при этом диск совершает плоское движение.

**ω**е

**ω**r

**ωa**

A

O

Pис.2

Пусть сначала угловые скорости сонаправлены. В этом случае абсолютная угловая скорость

отлична от нуля. Это значит, что существует мгновенный центр скоростей , скорость которого равна нулю в данный момент:

Точка совершает составное движение, поэтому ее скорость равна сумме переносной и относительной скоростей

Значит,

Переносная и относительная скорости направлены противоположно только у точек на линии ОА. Среди них есть точка , для которой:

Мы нашли положение мгновенного центра скоростей

Таким образом, в данном случае тело совершает плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей делит расстояние между осями обратно пропорцанально угловым скоростям «внутренним образом».

**ω**е

**ω**r

**ωa**

A

O

P

Pис.3

Пусть теперь направления вращений ***противоположны***. В этом случае модуль абсолютной угловой скорости равен разности

Сначала положим, что .

Тогда опять существует МЦС . Но теперь он вне отрезка ОА, со стороны большей угловой скорости . Попрежнему

Но на этот раз мгновенный центр скоростей делит расстояние между осями обратно пропорцанально угловым скоростям «внешним

образом».

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Случай равенства модулей скоростей

A

B

Рис.4

называется «***парой вращений***». При этом тело не вращается

а совершает ***круговое поступательное движение***. Точно такое, как кабина колеса обозрения. Скорости всех точек диска одинаковы и равны

то есть «моменту» пары вращений. Смотрите анимацию

<http://www.ostralo.net/3_animations/swf/grande_roue.swf>

**Дифференциальный и планетарный механизмы.**

**Метод Виллиса.**

Механизм, изображенный на Рис.5, состоящий из двух колес в зацелении, оси которых находятся на концах водила ОА, называется ***дифференциальным***, если центральное колесо вращается

ωОА

ω2

ω1

Рис.5

О

А

и ***планетарным***, если центральное колесо не вращается

***Методом Виллиса*** найдем угловую скорость колеса 2 по угловым скоростям и

Метод состоит в придании всему механизму скорости . При этом, согласно теореме о сложении угловых скоростей, водило ОА останавливается. Механизм превращается в обычное внешнее зацепление двух колес с новыми угловыми скоростями

Новые угловые скорости противоположны по направлению и обратно пропорциональны радиусам колес. Смотрите анимацию:

<http://www.rkm.com.au/ANIMATIONS/animation-gear-ratio.html>)

Таким образом,

Или

Для планетарного механизма

Получаем очевидный результат

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Сферическое движение тела.**

**Углы Эйлера.**

**Закон движения.**

***Сферическим*** называется движение тела, при котором одна точка А тела остается неподвижной. Название отражает тот факт, что при таком движении точки тела движутся по сферам. Более полно это движение называется ***вращением вокруг неподвижной точки***.



Покажем, что положение тела можно задать тремя угловыми координатами. В теоретической механике чаще всего рассматривают углы Эйлера: **ψ -*угол прецессии*, ϑ -*угол нутации*, ϕ-*угол собственного вращения***(Рис.1).

По значениям углов Эйлера построим положение тела в пространстве. Иначе говоря, совместим оси (*x y z*) c осями (*х’y’ z’)*.

Сначала поворотом на угол ψ вокруг оси *z* перейдем к осям (x1 y1z) (y1 не изображена на Рис.1). Ось x1 называется***линией узлов***.

Далее поворотом на угол ϑ вокруг оси x1 перейдем к осям (x1 y2 z’) (y2 не изображена).

Третьим и последним осуществим поворот на угол ϕ вокруг оси *z’*. При этом оси (x1 y2 z’) совместятся с осями (*х’y’ z’)*:

Мы показали, что углы Эйлера определяют положение тела. Таким образом, три функции

являются ***законом сферического движения*** тела. Поэтому говорят, что такое тело имеет 3 степени свободы.

**Угловая скорость и угловое ускорение тела**

Найдем угловую скорость тела, воспользовавшись теоремой о сложении угловых скоростей.

Ее можно применить, поскольку углы Эйлера задают положение каждой системы координат по отношению к предыдущей системе координат.

Тело совершает три вращения с угловыми скоростями: вокруг оси z, вокруг оси x1 и вокруг оси z’. По теореме о сложении угловых скоростей:

Проектируя это выражение на неподвижные оси, находим



В отличие от вращательного движения тела, где вектор угловой скорости **ω** все время направлен вдоль неподвижной оси вращения, здесь вектор **ω** изменяет как модуль, так и направление. Поэтому вектор углового ускорения

направленный по касательной к годографу вектора **ω,**  не совпадает с **ω** по направлению.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Скорость и ускорение точки тела**

Выберем за полюс неподвижную точку О. Тогда скорость произвольной точки М тела можно найти по формуле

Отсюда следует, что в данный момент скорости распределены в теле так, как если бы тело вращалось вокруг ***мгновенной оси*** S (Рис.2). Это значит, что скорости точек на оси S равны нулю.

Скорости других точек тела линейно зависят от расстояния h от точки до оси S.

Ускорение произвольной точки М

состоит из вращательной и осестремительной составляющих:

Будет показано, что в сферическом движении не ортогональны. Осестремительное ускорение направлено к мгновенной оси S, а вращательное перпендикулярно плоскости (**ε r**).

Векторным формулам соответствуют матричные выражения скорости и ускорения, удобные для их вычисления в произвольный момент времени.



***Пример***

Подвижный конус обкатывается по неподвижному конусу без проскальзывания. Заданы: угол 𝛼, длина OA и cкорость VC центра основания подвижного конуса.

Определить скорость и ускорение верхней точки А подвижного конуса.

Ввиду отсутствия проскальзывания скорости точек образующей контакта в данный момент равны нулю. Мгновенная ось S и угловая скорость направлены вдоль этой образующей.

Отсюда

Осесимметричное ускорение точки А направлено по АК и равно

Постоянная по модулю угловая скорость вращается вместе с мгновенной осью S вокруг вертикальной оси. Скорость вращения равна

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Угловое ускорение направлено по касательной к годографу вектора параллельно .

Таким образом, действительно в сферическом движении угловое ускорение и скорость не коллинеарны. Найдем по формуле Эйлера

Таким образом

Вращательное ускорение точки А направлено как векторное произведение

перпендикулярно ОА в плоскости xz.

Видим, что в сферическом движении вращательное и осестремительное ускорения не ортогональны.

Окончательно